

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 9-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor ***)

Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c \leq 4$ și $ab + bc + ca \geq 4$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$.

b) Arătați că sunt adevărate cel puțin două dintre inegalitățile

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$	6
a) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 16 - 2 \cdot 4 = 8$	6
b) $ a - b ^2 + b - c ^2 + c - a ^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$	5
$ a - b ^2 + b - c ^2 + c - a ^2 \leq 8$, deci cel puțin doi termeni ai sumei inițiale sunt ≤ 4 .	5,5

Problema 2 (***, S.G.M 11/2025)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deoarece membrul stâng este număr întreg, trebuie ca și membrul drept să fie număr întreg.	5
Rezultă $[x] = 0$ sau $[x] = 2$	5
Pentru $[x] = 0$ ecuația devine $\left[\frac{1}{1-x} \right] = 1$, echivalent cu $1 \leq \frac{1}{1-x} < 2$.	3
Aceasta se reduce la $\frac{1}{2} < 1-x \leq 1$, iar mulțimea soluțiilor din acest caz este $\left[0, \frac{1}{2} \right)$.	3
Pentru $[x] = 2$ ecuația devine $\left[\frac{1}{1-x} \right] = -1$, echivalent cu $-1 \leq \frac{1}{1-x} < 0$.	3
Aceasta se reduce la $1-x \leq -1$ iar mulțimea soluțiilor din acest caz este $[2, 3)$.	3
În concluzie, mulțimea tuturor soluțiilor este $\left[0, \frac{1}{2} \right) \cup [2, 3)$	0,5

Problema 3 (autor ***)

Considerăm predicatul $P(k, n): k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1$, unde n și k sunt numere naturale, $k \geq 1$.

a) Arătați că propoziția $P(3, 1)$ este adevărată, iar propoziția $P(3, 2)$ este falsă.

b) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „pentru orice număr natural $k \geq 1$ există un număr natural n astfel încât propoziția $P(k, n)$ să fie falsă”.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$3(\sqrt{2} - \sqrt{1}) = \sqrt{18} - 3 > 1$, deoarece $\sqrt{18} > 4$	7
$3(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{27} - \sqrt{18} < 1$, deoarece $\sqrt{27} < 5,2$ și $\sqrt{18} > 4,2$	7
$k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$	5
Pentru $n = k^2$ ultima inegalitate este falsă, deci propoziția $P(k, n)$ este falsă. Ca atare, propoziția la care se referă enunțul este adevărată (pentru orice număr natural $k \geq 1$ există numărul natural $n = k^2$)	3,5

Problema 4 (autor ***)

Fie D , E , F punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC la BC , AC , respectiv AB .

a) Arătați că, dacă notăm cu p semiperimetrul triunghiului, atunci

$$a\overrightarrow{AD} = (p - c)\overrightarrow{AB} + (p - b)\overrightarrow{AC}.$$

b) Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Știm că $BD = p - b$, $CD = p - c$.	5
Apoi $\overrightarrow{AD} = \frac{CD}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC}\overrightarrow{AC}$, de unde reiese cerința	5
b) Cu relația de la punctul a), dacă $a = b = c = 2x$, atunci $p = 3x$ și $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$	6
Reciproc, dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, folosind punctul a) și exprimând totul în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} obținem $\left(\frac{p-c}{a} + \frac{p-a}{c} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{p-b}{a} + \frac{p-a}{b} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0},$ deci parantezele sunt nule.	4
Aceasta se reduce la $a^2 + c^2 - ab - bc = 0$ și $a^2 + b^2 - bc - ac = 0$. Prin scăderea acestor relații obținem $(b - c)(a + b + c) = 0$, de unde $b = c$. Înlocuind aceasta într-una din relațiile precedente obținem $a = b$, deci $a = b = c$.	2,5